ENSA-ALHOCEIMA **ANALYSE 4**
CP II. **SEMESTRE 2**
F.MORADI

Exercice 3 :

1) *Posons* $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{x} x^{\frac{1}{n}}$ $pour\ \ n \in \mathbb{N}^*\ \ et\ \ x \in [1, +\infty[.$

   Il est clair que:

   i. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *est une suite de fonctions continues sur* $[1, +\infty[$.

   ii. *la suite* $\left(f_n(x)\right)_n$ *converge simplement vers la fonction:*

   $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ *qui est une fonction continue sur* $[1, +\infty[$.

   iii. *De plus,* $(\forall x \in [1, +\infty[)(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $|f_n(x)| \leq e^{-x} = g(x)$ *avec* *g est continue et intégrable sur* $[1, +\infty[$.

   Donc, d'après (i), (ii), (iii) et le théorème de convergence dominée, on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} x^{\frac{1}{n}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

2) *Posons* $I_n = n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$. *Par le changement de variables* $t = x^n$, *on obtient :* $x = t^{\frac{1}{n}}$ *donc* $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$ *et* $\begin{cases} x = 1 \\ x \to +\infty \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t \to +\infty \end{cases}.$

Par suite:

$$I_n = n \int_1^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} t^{\frac{1}{n}} dt$$

Donc d'après 1), on déduit que:

$$lim_{n\to+\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

Exercice 4 :

1) *Comme* $lim_{x\to0^+} \varphi(x) = lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2-1} . x lnx = 0$

et $lim_{x\to1^-}\ \varphi(x) = lim_{x\to1^-} \frac{x}{x+1} . \frac{lnx}{x-1} = \frac{1}{2}$, *alors* φ *est prolongeable par continuité sur* $[0,1]$.

Par suite, φ *est intégrable sur* $]0,1[$.

2) *On a* $f_n(x) = \frac{lnx}{x^2-1} x^{2n+1}$ *et* $\forall x \in]0,1[$: $\varphi(x) \geq 0$ *donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in]0,1[):\ \ |f_n(x)| = |\varphi(x). x^{2n}| \leq |\varphi(x)| = \varphi(x)$$

Et puisque φ *est intégrable sur* $]0,1[$ *alors pour tout* $n\epsilon\mathbb{N}$, f_n *est intégrable sur* $]0,1[$.

3) *La suite de fonctions* $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait les conditions du théorème de convergence dominée, donc*

$$lim_{n\to+\infty}I_n = \int_0^1 lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx = 0$$

Soit $k\epsilon\mathbb{N}^*$, *on a donc*

$$I_{k-1} - I_k = \int_0^1 \left(f_{k-1}(x) - f_k(x)\right)dx = \int_0^1 \frac{lnx}{x^2-1}\left(x^{2k-1} - x^{2k+1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{lnx}{x^2-1}x^{2k-1}(1-x^2)dx = -\int_0^1 x^{2k-1}lnxdx$$

Par une intégration par parties, on pose

$$\begin{cases} u(x) = lnx \\ v'(x) = x^{2k-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{2k}x^{2k} \end{cases}$$

Et on trouve

$$\int_0^1 x^{2k-1}lnxdx = lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{1}{2k}x^{2k}.lnx\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2k}\int_0^1 x^{2k-1}dx = -\frac{1}{(2k)^2}\left[x^{2k}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{(2k)^2}$$

Finalement, $I_{k-1} - I_k = \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4k^2}$.

En faisant la sommation de $k = n+1$ *jusqu'à N , on obtient*

$$\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{N}(I_{k-1} - I_k) = I_n - I_N$$

Et en tendant N vers $+\infty$, *on aboutit à*

$$\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = I_n - lim_{N\to+\infty}I_N = I_n$$